

© International Baccalaureate Organization 2023

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2023

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2023

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Mathematik: Analyse und Ansätze

Leistungsstufe

1. Klausur

30. Oktober 2023

Zone A Nachmittag | Zone B Nachmittag | Zone C Nachmittag

Prüfungsnummer des Kandidaten

2 Stunden

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur dürfen Sie keinen Taschenrechner nutzen.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Answerheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Answerhefts ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[110 Punkte]**.



Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben
werden, werden nicht bewertet.



Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

Teil A

Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 5]

Betrachten Sie die Funktionen $f(x) = x - 3$ und $g(x) = x^2 + k^2$, mit einer reellen Konstanten k .

- (a) Notieren Sie einen Ausdruck für $(g \circ f)(x)$. [2]
- (b) Es sei $(g \circ f)(2) = 10$. Finden Sie die möglichen Werte von k . [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



3. [Maximale Punktzahl: 7]

Die Summe der ersten n Terme einer arithmetischen Folge ist gegeben durch $S_n = pn^2 - qn$, wobei p und q positive Konstanten sind.

Es gilt: $S_4 = 40$ und $S_5 = 65$.

(a) Finden Sie die Werte von p und q . [5]

(b) Finden Sie den Wert von u_5 . [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

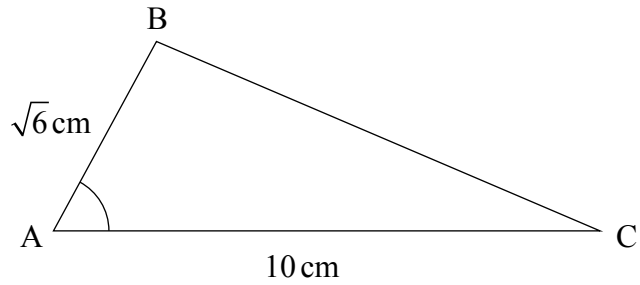
.....



4. [Maximale Punktzahl: 6]

Im folgenden Dreieck ABC gilt: $AB = \sqrt{6} \text{ cm}$, $AC = 10 \text{ cm}$ und $\cos \hat{BAC} = \frac{1}{5}$.

Zeichnung nicht maßstabsgerecht



Finden Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



5. [Maximale Punktzahl: 6]

Die binomische Entwicklung von $(1 + kx)^n$ ist gegeben durch $1 + 12x + 28k^2x^2 + \dots + k^n x^n$,
mit $n \in \mathbb{Z}^+$ und $k \in \mathbb{Q}$.

Finden Sie die Werte von n und k .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP07

6. [Maximale Punktzahl: 7]

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $5^{2n} - 2^{3n}$ für alle $n \in \mathbb{Z}^+$ durch 17 teilbar ist.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



7. [Maximale Punktzahl: 5]

Es gilt: $z = 5 + qi$ erfüllt die Gleichung $z^2 + iz = -p + 25i$, mit $p, q \in \mathbb{R}$.

Finden Sie die Werte von p und q .

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....



8. [Maximale Punktzahl: 9]

(a) Finden Sie $\int x(\ln x)^2 dx$. [6]

(b) Zeigen Sie damit, dass $\int_1^4 x(\ln x)^2 dx = 32(\ln 2)^2 - 16\ln 2 + \frac{15}{4}$. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



9. [Maximale Punktzahl: 8]

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{\sin^2(kx)}{x^2}$, mit $x \neq 0$ und $k \in \mathbb{R}^+$.

(a) Zeigen Sie, dass f eine gerade Funktion ist. [2]

(b) Es sei $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 16$. Finden Sie den Wert von k . [6]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Bitte umblättern

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Answerheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

10. [Maximale Punktzahl: 15]

Die Funktionen f und g sind folgendermaßen definiert:

$$f(x) = \ln(2x - 9), \text{ mit } x > \frac{9}{2}$$

$$g(x) = 2 \ln x - \ln d, \text{ mit } x > 0, d \in \mathbb{R}^+.$$

(a) Geben Sie die Gleichung der vertikalen Asymptote an den Graphen von $y = g(x)$ an. [1]

Die Graphen von $y = f(x)$ und $y = g(x)$ schneiden sich in zwei verschiedenen Punkten.

(b) (i) Zeigen Sie, dass in den Schnittpunkten gilt: $x^2 - 2dx + 9d = 0$.

(ii) Zeigen Sie damit, dass $d^2 - 9d > 0$.

(iii) Finden Sie den Wertebereich der möglichen Werte von d . [9]

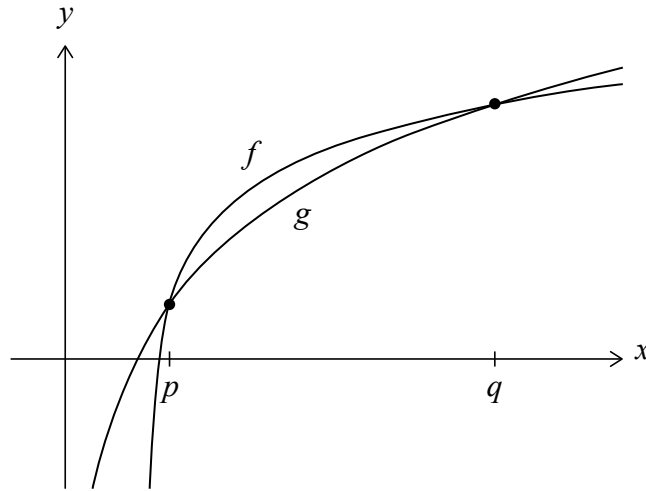
(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)



Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

(Fortsetzung Frage 10)

Das folgende Diagramm zeigt Teile der Graphen von $y = f(x)$ und $y = g(x)$.



Die Graphen schneiden sich an $x = p$ und $x = q$, mit $p < q$.

- (c) Finden Sie für $d = 10$ den Wert von $q - p$. Geben Sie Ihre Antwort in der Form $a\sqrt{b}$, mit $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

[5]



Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

11. [Maximale Punktzahl: 21]

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = e^{\cos 2x}$, mit $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$.

- (a) Finden Sie die Koordinaten des Punktes auf der Kurve $y = f(x)$, an dem die Steigung Null ist. [5]
- (b) Zeigen Sie anhand der zweiten Ableitung an jedem in Teil (a) gefundenen Punkt, dass die Kurve $y = f(x)$ zwei lokale Hochpunkte und einen lokalen Tiefpunkt aufweist. [4]
- (c) Skizzieren Sie den Teil der Funktion von $y = f(x)$ für $0 \leq x \leq \pi$, unter Berücksichtigung der in Teil (b) gefundenen relativen Werte der zweiten Ableitung. [3]
- (d) (i) Finden Sie die Maclaurinsche Reihe für $\cos 2x$ bis einschließlich des Gliedes x^4 .
(ii) Finden Sie damit die Maclaurinsche Reihe für $e^{\cos 2x - 1}$ bis einschließlich des Gliedes x^4 .
(iii) Notieren Sie damit die Maclaurinsche Reihe für $f(x)$ bis einschließlich des Gliedes x^4 . [6]
- (e) Zeigen Sie mit Hilfe der ersten beiden von Null verschiedenen Terme der Maclaurinschen Reihe für $f(x)$, dass $\int_0^{1/10} e^{\cos 2x} dx \approx \frac{149e}{1500}$. [3]



Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

12. [Maximale Punktzahl: 17]

- (a) Finden Sie die binomische Entwicklung von $(\cos \theta + i \sin \theta)^5$. Geben Sie Ihre Antwort in der Form $a + bi$ an, in der a und b abhängig von $\sin \theta$ und $\cos \theta$ ausgedrückt werden. [4]
- (b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von de Moivre und Ihrer Antwort aus Teil (a), dass $\sin 5\theta \equiv 16 \sin^5 \theta - 20 \sin^3 \theta + 5 \sin \theta$ gilt. [6]
- (c) (i) Zeigen Sie damit, dass $\theta = \frac{\pi}{5}$ und $\theta = \frac{3\pi}{5}$ Lösungen der Gleichung $16 \sin^4 \theta - 20 \sin^2 \theta + 5 = 0$ sind.
- (ii) Zeigen Sie damit, dass $\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4}$. [7]
-



Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben
werden, werden nicht bewertet.



16EP16